Journal of Science and Mathematics Letters, Vol 9, Special Issue, 2021 (18-27)
ISSN 2462-2052, eISSN 2600-8718

RESEARCH PAPER

Pencirian Kumpulan-5 yang Mempunyai Litupan-X_{11} dengan Persilangan Bebas-teras

Characterisation of 5-groups having a X_{11}-covering with Core-free Intersection

Rawdah Adawiyah Tarmizi [1*], Hajar Sulaiman [2]

[1]Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Matematik, Universiti Pendidikan Sultan Idris, 39500 Tanjong Malim, Perak, Malaysia
[2] Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, 11800 USM, Penang, Malaysia

*Corresponding author: rawdah@fsmt.upsi.edu.my

Published: 18 February 2021

To cite this article (APA): Tarmizi, R. A., & Sulaiman, H. (2021). Characterisation of 5-groups having a X_{11}-covering with Core-free Intersection. *Journal of Science and Mathematics Letters*, *9*, 18-27. https://doi.org/10.37134/jsml.vol9.sp.3.2021

To link to this article: https://doi.org/10.37134/jsml.vol9.sp.3.2021

Abstrak

Andaikan *G* adalah kumpulan terhingga. Jika terdapat suatu set yang mengandungi *n* subkumpulan wajar dalam *G* yang kesatuannya merangkumi semua unsur bagi *G*, maka *G* merupakan kumpulan terlitup. Set bagi *n* subkumpulan wajar dipanggil litupan-*n* bagi *G* dan bilangan minimum bagi *n* yang melitupi *G* ialah 3, ini bermakna $n \geq 3$. Jika litupan-*n* tidak mempunyai subset wajar yang juga melitupi *G*, maka ia dipanggil litupan-*n* tak berlebihan bagi *G* dan ia dipanggil litupan-*n* maksimal jika ia mengandungi hanya subkumpulan maksimal bagi *G*. Suatu litupan-*n* tak berlebihan maksimal dengan persilangan bebas-teras dikenali sebagai suatu litupan-X_n. Kajian ini mencirikan kumpulan-5 yang mempunyai suatu litupan-X_{11}. Didapati bahawa kumpulan-5 mempunyai litupan-X_{11} jika dan hanya jika ia berisomorfisma dengan beberapan kumpulan abelan bagi sesetengah peringkat.

Kata kunci: Litupan bagi kumpulan, litupan-*n* tak berlebihan maksimal, persilangan bebas-teras, kumpulan-5

Abstract

Let *G* be a finite group. If there is a set containing *n* proper subgroups in *G* whose union comprises all elements of *G*, then *G* is a coverable group. The set of *n* proper subgroups is called an *n*-covering for *G* and the minimum number of *n* covers *G* is 3, so this means $n \geq 3$. If the *n*-covering has no proper subset that also covers *G* then it is called an irredundant *n*-covering for *G* and it is called a maximal *n*-covering if it consists of only maximal subgroups. A maximal irredundant *n*-covering with a core-free intersection is known as a X_n-covering. This study characterizes 5-groups having a X_{11}-covering. It was found that a *5*-group has a X_{11}-covering if and only if it is isomorphic to some elementary abelian groups of a certain order.

Keywords: Covering of a group, maximal irredundant *n*-covering, core-free intersection, 5-groups

PENGENALAN

Suatu set bagi subkumpulan wajar bagi kumpulan *G* yang kesatuannya adalah sama dengan keseluruhan kumpulan *G* dikenali sebagai litupan. Set yang melitupi *G* dengan *n* bilangan subkumpulan wajar dipanggil litupan-*n*. Litupan dikatakan tak berlebihan, apabila salah satu subkumpulan di dalam litupan tersebut dikeluarkan menyebabkan kesatuan bagi subkumpulan yang tinggal tidak sama dengan keseluruhan *G*. Jika kesemua ahli bagi litupan adalah subkumpulan maksimal, maka litupan tersebut dipanggil litupan maksimal. Andaikan *D* sebagai persilangan semua ahli bagi litupan. Maka, *D* dipanggil subkumpulan bebas-teras bagi *G* jika $\bigcap_{g\in G} gDg^{-1}=1$. Litupan-*n* tak berlebihan maksimal dengan persilangan bebas-teras dikenali sebagai litupan-X_n dan kumpulan dengan jenis litupan ini dipanggil kumpulan-X_n.

Pencirian kumpulan-*p* dengan litupan-X_n untuk $n\in\{7,8,9\}$ telah diselesaikan oleh Abdollahi et al. (2008). Mereka menggunakan teori set blok untuk mendapatkan sebahagian daripada keputusan. Kemudian, Ataei (2010) mencirikan dengan lengkap kumpulan nilpotent yang mempunyai litupan-X_8. Diteruskan pula dengan Ataei and Sajjad (2011) yang telah mencirikan kumpulan-5 dengan litupan-X_{10} bagi kes kumpulan-5 bagi peringkat 5^3, 5^5 dan 5^6. Mereka juga membuktikan bahawa jika kumpulan-*p* mempunyai litupan-X_n dengan persilangan bebas-teras *D*, maka $D=1$ dan kumpulan-*p* tersebut merupakan kumpulan abelan. Baru-baru ini, Tarmizi and Sulaiman (2016) telah mencirikan kumpulan-7- dengan litupan-X_{12}. Dalam kajian ini, fokus adalah kepada pencirian kumpulan-5 yang mempunyai litupan-X_{11}.

Untuk melakukan pencirian, beberapa teknik yang dibangunkan oleh Abdollahi et al. (2008), Ataei (2010) dan Ataei and Sajjad (2011) telah digunakan. Sesetengah peringkat bagi kumpulan-5 memerlukan bantuan perisian *Group Algorithm Programming* (GAP) untuk menyenaraikan subkumpulan maksimal dan memilih koleksi yang betul bagi 11 subkumpulan maksimal yang boleh melitupi kumpulan-5 secara tak berlebihan dan dengan persilangan bebas-teras. Penggunaan perisian GAP juga didapati digunakan dalam kajian yang dijalankan oleh Abd Manaf et al. (2012) untuk mengira batas darjah luaran bagi beberapa kumpulan-*p* terhingga.

PRELIMINARI

Pada bahagian ini preliminari dan hasil kajian yang relevan tentang litupan-X_n daripada pengkaji terdahulu dibincangkan. Diingatkan, terdapat notasi yang kerap digunakan di dalam perbincangan ini. Misalnya, C_n melambangi kumpulan kitaran *n* peringkat dan pendaraban langsung manakala $(C_n)^m$ melambangi pendaraban langsung bagi salinan *m* kali bagi C_n iaitu. $\overbrace{C_n\times\cdots\times C_n}^{m\text{ kali}}$ untuk beberapa $m\in\mathbb{N}$.

Lema 1 digunakan untuk menghitung bilangan subkumpulan maksimal untuk kumpulan-*p* abelan permulaan.

Lema 1. *(Newton, 2011) Jika G ialah suatu kumpulan-p abelan permulaan untuk beberapa nombor perdana p, maka bilangan subkumpulan maksimal sama dengan* $\frac{|G|-1}{p-1}$.

Lema 2 adalah berkenaan tentang indeks bagi suatu subkumpulan *H* bagi kumpulan *G*.

Lema 2. *(Hungerford, 1974) Andaikan* H_1 *dan* H_2 *adalah subkumpulan indeks terhingga bagi kumpulan G. Maka* $|G : H_1 \cap H_2| \le |G : H_1||G : H_2|$. *Selanjutnya,* $|G : H_1 \cap H_2| = |G : H_1||G : H_2|$ *jika dan hanya jika* $G = H_1 H_2$.

Lema berikutnya menyediakan pencirian penting terhadap kumpulan-*p* yang mempunyai litupan-X_n.

Lema 3. *(Ataei & Sajjad, 2011) Andaikan G adalah kumpulan-p yang mempunyai suatu litupan-*X_n. *Maka* $D = 1$ *dan G adalah kumpulan-p abelan permulaan terhingga.*

Lema 4 mengenal pasti beberapa ciri bagi nilai *p* untuk kumpulan-*p* yang mempunyai suatu litupan-X_n.

Lema 4. *(Abdollahi et al., 2008) Andaikan G adalah suatu kumpulan-p terhingga yang mempunyai suatu litupan-*X_n $\{M_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. *Maka*

i. $p \le n-1$.
ii. *Jika s adalah integer memenuhi syarat* $1 \le s \le n-2$ *dan* $p = n - s$, *maka* $\bigcap_{i \in S} M_i = 1$ *bagi setiap subset S bagi* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *dengan* $|S| \ge s+1$.
iii. *Jika* $n = p+1$, *maka* $G \cong (C_p)^2$.

Lema seterusnya menyatakan beberapa fakta terhadap persilangan bagi ahli litupan-X_n untuk kumpulan yang mana pendaraban terus bagi kumpulan abelan permulaan.

Lema 5. *(Abdollahi et al., 2008) Andaikan* $G = (C_p)^d$ *untuk* $d \ge 2$ *dan p adalah nombor perdana. Jikalau G mampunyai litupan-*X_n $\{M_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ *dan andaikan* $T \subseteq \{1, 2 \ldots, n\}$.

i. *Jika* $|T| = n - p$, *maka* $|\bigcap_{i \in T} M_i| = 1$ *atau p.*
ii. *Jika* $|T| = 2$, *maka* $|\bigcap_{i \in T} M_i| = p^{d-2}$.
iii. $\bigcap_{i \in S} M_i = 1$ *untuk beberapa S dengan saiz d.*
iv. *Jika* $\bigcap_{i \in S} M_i = 1$ *apabila* $|S| = d$, *maka* $p \le |\bigcap_{i \in T} M_i| \le n - d + 1$ *apabila* $|T| = d - 1$.

Berikut merupakan keputusan terhadap litupan bagi kumpulan yang digunakan bagi pembuktian kajian ini.

Lema 6. *(Abdollahi, 2009) Andaikan* $H_1 = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ *dan* $H_2 = \{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$ *merupakan litupan-m dan litupan-n tak berlebihan bagi dua kumpulan* G_1 *dan* G_2, *masing-*

masing. Jikalau M_1 *dan* N_1 *adalah subkumpulan bagi* G_1 *dan* G_2*, masing-masing dan andaikan bahawa x dan y adalah unsur bagi* $G_1 \setminus M_1$ *dan* $G_2 \setminus N_1$ *masing-masing seperti* M_1x *dan* N_1y *mempunyai p yang sama bagi beberapa nombor perdana. Maka*

$$H = \left\{ \left(M_1 \times N_1 \right) \left(x, y \right), M_i \times G_2, G_1 \times N_j \mid i = 2, ..., m; \, j = 2, ..., n \right\},$$

adalah litupan-(m+n-1) tak berlebihan untuk $G_1 \times G_2$ *dengan persilangan* $D_1 \times D_2$ *yang mana* $D_1 = \bigcap_{i=1}^{m} M_i$, $D_2 = \bigcap_{j=1}^{n} N_j$ *dan* $(M_1 \times N_1)\langle (x, y) \rangle$ *adalah subkumpulan bagi* $G_1 \times G_2$ *dijanakan dengan* $M_1 \times N_1$ *dan unsur* (x, y)*. Dengan lebih tepat, jika kedua-dua* H_1 *dan* H_2 *adalah subkumpulan maksimal, maka H adalah litupan maksimal bagi* $G_1 \times G_2$.

Lema 7. (*Abdollahi et al., 2005) Andaikan G adalah kumpulan-*X_6*. Maka G adalah suatu kumpulan-p untuk suatu nombor perdanan p jika dan hanya jika* $G \cong (C_3)^3$ *atau* $G \cong (C_5)^2$.

Lema 8. *(Abdollahi et al., 2008) Andaikan G adalah suatu kumpulan-*X_9*. Maka G adalah suatu kumpulan-p untuk suatu nombor perdanan p jika dan hanya jika* $G \cong (C_2)^8$ *atau* $G \cong (C_3)^5$ *atau* $G \cong (C_5)^3$.

Lema 9. *(Ataei & Sajjad, 2011) Andaikan G adalah suatu kumpulan-5 seperti* $|G| \neq 5^4$*. Maka G adalah suatu kumpulan-*X_{10} *jika dan hanya jika* $G \cong (C_5)^3$.

HASIL KAJIAN DAN PERBINCANGAN

Pencirian untuk kumpulan-5 yang mempunyai litupan-X_{11} dimulakan dengan lema berikut.

Lema 10. *Amdaikan G adalah suatu kumpulan-5. Jika G adalah suatu kumpulan-*X_{11}*, maka* $5^3 \leq |G| \leq 5^7$.

Pembuktian. Andaikan *G* adalah suatu kumpulan-5 yang juga adalah kumpulan-X_{11}. Dengan itu, $G = \bigcup_{i=1}^{11} M_i$ dan $\bigcap_{i=1}^{11} M_i$ adalah bebas-teras di dalam *G* yang mana setiap M_i adalah ahli bagi litupan-X_{11} tak berlebihan maksimal dengan persilangan bebas-teras bagi kumpulan *G*. Andaikan $D = \bigcap_{i=1}^{11} M_i$ dan dengan Lema 3, $D = \bigcap_{i=1}^{11} M_i = 1$ dan *G* adalah kumpulan-5 abelan permulaan. Jadi, $G \cong (C_5)^d$ untuk suatu integer positif *d*. Oleh itu, $|G| = 5^d$. Andaikan $S = \{1, 2, \ldots, 11\}$ dan $\{M_i \mid i \in S\}$ melambangi set yang mewakili mewakili litupan-11 bebas-teras tak berlebihan maksimal untuk kumpulan *G*. Dengan Lema 5(ii),

$$\left| G : M_i \cap M_j \right| = \frac{5^d}{5^{d-2}} = 5^2 \text{, untuk setiap } i, j \in S \text{ yang berbeza.} \qquad (1)$$

Oleh itu, $|G| \geq 5^2$.

Sekarang, Lema 4(ii) menunjukkan bahawa $\bigcap_{i\in T} M_i = 1$ untuk semua $T \subset S$ dengan $|T| = 11-5+1 = 7$. Memandangkan M_i adalah suatu subkumpulan maksimal untuk semua $i \in S$, maka setiap M_i adalah normal dan $|G : M_i| = 5$. Oleh itu, dengan Lema 2,

$$\begin{aligned} |G| &= |G : M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_l \cap M_t \cap M_u \cap M_v| \\ &\leq |G : M_i \cap M_j||G : M_k \cap M_l||G : M_t \cap M_u||G : M_v| \\ &= 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5 = 5^7 \end{aligned}$$

dengan (1) bagi semua $i, j, k, l, t, u, v \in S$. Justeru itu, $5^2 \leq |G| \leq 5^7$. Namun, jika $G \cong (C_5)^2$, maka dengan Lema 1, *G* mempunyai hanya enam subkumpulan maksimal. Oleh itu, $5^3 \leq |G| \leq 5^7$.

Daripada Lema 10, kumpulan-5 abelan permulaan litupan-X11 adalah yang mempunyai peringkat 5^3, 5^4, 5^5, 5^6 atau 5^7 yang menunjukkan kemungkinan untuk *G* adalah $(C_5)^3$, $(C_5)^4$, $(C_5)^5$, $(C_5)^6$ atau $(C_5)^7$. Walau bagaimanapun, dua lema berikut menunjukkan *G* adalah suatu kumpulan-5 dengan litupan-X11, maka *G* tidak berisomorfisma dengan $(C_5)^6$ atau $(C_5)^7$.

Lema 11. *Jika* $G \cong (C_5)^6$, *maka G bukan suatu kumpulan*-X11.

Pembuktian. Andaikan $G \cong (C_5)^6$. Untuk mendapatkan percanggahan, katakan *G* mempunyai litupan-X11. Ini bermaksud $G = \bigcup_{i=1}^{11} M_i$ dan $\bigcap_{i=1}^{11} M_i$ adalah bebas teras di dalam *G* yang mana $S = \{1, 2, \ldots, 11\}$ dan $\{M_i \mid i \in S\}$ adalah set yang mewakili litupan-11 bebas-teras tak berlebihan maksimal bagi *G*. Dengan Lema 5(iii),

$$\bigcap_{i\in T} M_i = 1 \text{ untuk beberapa } T \subset S \text{ yang } |T| = 6. \tag{2}$$

Memandangkan $\{M_i \mid i \in S\}$ adalah suatu litupan tak berlebihan, maka bagi semua $U \subset S$ dengan $|U| = 6$, wujud $k \in S$ seperti $\bigcap_{i\in U} M_i \nleq M_k$.

Sekarang, Lema 4(ii) menunjukkan bahawa jika $L \subset S$, maka $\bigcap_{i\in L} M_i = 1$ bagi semua $|L| \geq 11-5+1 = 7$. Jadi, jika $L' \subset S$ dengan $|L'| = 7$, maka

$$\begin{aligned} |G| &= |G : \textstyle\bigcap_{i\in L'} M_i| = |G : \textstyle\bigcap_{j\in U} M_j \cap M_k| \\ &= |G : \textstyle\bigcap_{j\in U} M_j||G : M_k|. \end{aligned} \tag{3}$$

Memandangkan M_i adalah subkumpulan maksimal bagi semua $i \in S$, maka setiap M_i adalah normal dan $|G : M_i| = 5$. Oleh itu, daripada (3),

$$5^6 = |G| = |G : \textstyle\bigcap_{j\in U} M_j||G : M_k| = |G : \textstyle\bigcap_{j\in U} M_j|5,$$

yang mengimplikan $\left|G:\bigcap_{j\in U} M_j\right| = 5^5$. Walau bagaimanapun, ini melibatkan $\left|\bigcap_{j\in U} M_j\right| = 5$ untuk semua $U \subset S$ dan $|U| = 6$ yang mana bercanggah dengan (2). Justeru itu, $G \cong (C_5)^6$ adalah bukan kumpulan-X$_{11}$.

Seterusnya adalah membuktikan kes yang serupa iaitu untuk $(C_5)^7$.

Lema 12. *Jika* $G \cong (C_5)^7$, *maka G adalah bukan kumpulan-*X$_{11}$.

Pembuktian. Andaikan $G \cong (C_5)^7$. Untuk mendapatkan suatu percanggahan, katakan *G* mempunyai suatu litupan-X$_{11}$. Ini bermaksud $G = \bigcup_{i=1}^{11} M_i$ dan $\bigcap_{i=1}^{11} M_i$ adalah bebas-teras di dalam *G*. Andaikan $D = \bigcap_{i=1}^{11} M_i$ dan dengan Lema 3, $D = \bigcap_{i=1}^{11} M_i = 1$.

Andaikan $S = \{1, 2, \ldots, 11\}$ dan $\{M_i \mid i \in S\}$ melambangkan set bagi subkumpulan maksimal yang merupakan ahli bagi litupan-X$_{11}$. Memandangkan M_i adalah subkumpulan maksimal bagi semua $i \in S$, maka setiap M_i adalah normal dan $|G:M_i| = 5$. Dengan Lema 5(ii),

$$\left|M_i \cap M_j\right| = 5^5, \text{ bagi semua } i, j \in S \text{ tetapi } i \neq j. \tag{4}$$

Oleh yang demikian, $\left|G:M_i \cap M_j\right| = 5^2$ bagi semua dua unsur yang berbeza $i, j \in S$.
Sekarang, Lema 4(ii) mengimplikan bahawa

$$\bigcap_{i\in T} M_i = 1, \text{ bagi semua } T \subset S \text{ dengan } |T| \geq 11-5+1 = 7. \tag{5}$$

Perhatikan bahawa dengan Lema 2,

$\left|G:M_i \cap M_j \cap M_k\right| \leq \left|G:M_i \cap M_j\right|\left|G:M_k\right|$ bagi semua tiga unsur yang berbeza $i, j, k \in S$ yang mengimplikan $\left|\bigcap_{i\in T} M_i\right| \geq 5^4$ bagi semua $T \subset S$ dengan $|T| = 3$. Daripada (4) ia mengikuti bahawa $\left|\bigcap_{i\in T} M_i\right|$ sama ada sama dengan 5^4 atau 5^5 bagi $T \subset S$ yang $|T| = 3$.

Andaikan bahawa wujud $L \subset S$ dengan $|L| = 3$ seperti $\left|\bigcap_{i\in L} M_i\right| = 5^5$. Daripada (4), menunjukkan

$$\left|\bigcap_{i\in L} M_i\right| = \left|M_k \cap M_l\right| \text{ bagi semua dua unsur yang berbeza } k, l \in S.$$

Ini mengimplikan

$$\left|\bigcap_{i\in L} M_i\right| = \left|M_k \cap M_l\right| = 5^2.$$

Pertimbangkan $L' \subset S$ dengan $|L'| = 3$ dan $L \cap L' = \varnothing$ seperti $\left|\bigcap_{i\in L'} M_i\right| = 5^5$. Maka (4), (5) dan Lema 2 mengimplikan bahawa

$$\begin{aligned}|G| &= \left|G:\bigcap_{i\in L} M_i \cap M_k \cap M_l \cap M_v \cap M_w\right| \\ &\leq \left|G:\bigcap_{i\in L} M_i\right|\left|G:M_k \cap M_l\right|\left|G:M_v \cap M_w\right| \\ &= 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^6 \ \text{ bagi beberapa } k, l, v, w \in S.\end{aligned}$$

Ini bercanggah dengan fakta $|G|=5^7$. Oleh itu, tidak wujud sebarang $L\subset S$ dengan $|L|=3$ seperti $\left|\bigcap_{i\in L}M_i\right|=5^5$. Ini menunjukkan bahawa

$$\left|\bigcap_{i\in T}M_i\right|=5^4 \text{ bagi semua } T\subset S \text{ dengan } |T|=3. \tag{6}$$

Seterusnya, perhatikan semua $r,s,t,v\in S$, Lema 2 mengimplikan

$$|G:M_r\cap M_s\cap M_t\cap M_v|\le|G:M_r\cap M_s||G:M_t\cap M_v|=5^2\cdot5^2=5^4$$

Daripada (4), oleh itu, $\left|\bigcap_{i\in T}M_i\right|\ge5^3$ bagi semua $T\subset S$ dengan $|T|=4$. Dengan (6), diikuti bahawa $\left|\bigcap_{i\in T}M_i\right|=5^3$ atau $\left|\bigcap_{i\in T}M_i\right|=5^4$.

Pertimbangkan bahawa wujud $L\subset S$ dengan $|L|=4$ seperti $\left|\bigcap_{i\in L}M_i\right|=5^4$. Dengan (6) mengimplikan

$$\left|\bigcap_{i\in L}M_i\right|=|M_j\cap M_k\cap M_l|=5^4 \text{ bagi semua tiga unsur yang berbeza } j,k,l\in S.$$

Ini menunjukkan

$$\left|G:\bigcap_{i\in L}M_i\right|=|G:M_j\cap M_k\cap M_l|=5^3.$$

Kemudian, persamaan (5) dan Lema 2 mengimplikan bahawa

$$|G|=\left|G:\bigcap_{i\in L}M_i\cap M_j\cap M_k\cap M_l\right|\le\left|G:\bigcap_{i\in L}M_i\right||G:M_j\cap M_k\cap M_l|=5^3\cdot5^3=5^6.$$

In bercanggah dengan fakta $|G|=5^7$. Oleh itu, tidak wujud sebarang $L\subset S$ dengan $|L|=4$ seperti $\left|\bigcap_{i\in L}M_i\right|=5^4$. Ini bermaksud

$$\left|\bigcap_{i\in T}M_i\right|=5^3 \text{ bagi semua } T\subset S \text{ dengan } |T|=4. \tag{7}$$

Seterusnya, perhatikan bahawa bagi semua $r,s,t,u,v\in S$, Lema 2 mengimplikan

$$|G:M_r\cap M_s\cap M_t\cap M_u\cap M_v|\le|G:M_r\cap M_s||G:M_t\cap M_u||G:M_v|=5^2\cdot5^2\cdot5=5^5$$

Dengan menggunakan persamaan (4) dan $|G:M_j|=5$ bagi semua $j\in S$. Oleh yang demikian, $\left|\bigcap_{i\in T}M_i\right|\ge5^2$ bagi semua $T\subset S$ dengan $|T|=5$. Dari (7), $\left|\bigcap_{i\in T}M_i\right|$ adalah sama ada 5^2 atau 5^3. Sepatutnya wujud $L\subset S$ dengan $|L|=5$ seperti $\left|\bigcap_{i\in L}M_i\right|=5^3$. Kemudian, $\left|G:\bigcap_{i\in L}M_i\right|=5^4$. Oleh itu, dengan (4) dan Lema 2,

$$|G|=\left|G:\bigcap_{i\in L}M_i\cap M_s\cap M_t\right|\le\left|G:\bigcap_{i\in L}M_i\right||G:M_s\cap M_t| \text{ bagi beberapa } s,t\in S.$$

Memandangkan $\left|\bigcap_{i\in L}M_i\right|=5^4$, maka $\left|\bigcap_{i\in L}M_i\right|=\left|\bigcap_{j\in K}M_j\right|=5^4$ bagi beberapa $K\subset S$ dengan $|K|=4$. Ini menunjukkan bahawa

$$|G|\le\left|G:\bigcap_{i\in L}M_i\right||G:M_s\cap M_t|=5^4\cdot5^2=5^6.$$

Ini mengimplikan $|G| \le 5^6$ yang mana berlaku percanggahan memandangkan $|G| = 5^7$. Oleh yang demikian, tanggapan bahawa that $|\bigcap_{i\in L} M_i| = 5^3$ bagi beberapa $L \subset S$ dengan $|L| = 5$ adalah tidak benar. Oleh itu,

$$|\bigcap_{i\in T} M_i| = 5^2 \text{ bagi semua } T \subset S \text{ dengan } |T| = 5. \tag{8}$$

Seterusnya, penyiasatan dijalankan terhadap $|\bigcap_{i\in T} M_i|$ bagi $T \subset S$ dengan $|T| = 6$. Memandangkan $G \cong (C_5)^7$, maka dengan Lema 5(iv),

$$|\bigcap_{i\in T} M_i| = 5 \text{ bagi semua } T \subset S \text{ dengan } |T| = 6. \tag{9}$$

Sekarang, akan ditunjukkan bahawa $|\bigcup_{i\in S} M_i| \ne 5^7$. Dengan menggunakan Prinsip rangkuman-tolakan dan perkaitan (4) sehingga (9),

$$|\bigcup_{i\in S} M_i| = \binom{11}{1}5^6 - \binom{11}{2}5^5 + \binom{11}{3}5^4 - \binom{11}{4}5^3 + \binom{11}{5}5^2 - \binom{11}{6}5^5$$
$$+\binom{11}{7} - \binom{11}{8} + \binom{11}{9} - \binom{11}{10} + \binom{11}{11} = 71325 \ne 5^7$$

yang bermaksud $G \ne \bigcup_{i\in S} M_i$. Oleh itu, $(C_5)^7$ bukan suatu kumpulan-X_{11}.

$\square$

Daripada dua kes $G \cong (C_5)^6$ dan $G \cong (C_5)^7$ yang tak termasuk sebagai kumpulan-X_{11}, maka penyiasatan ini kekal untuk $G \cong (C_5)^3$, $G \cong (C_5)^4$ and $G \cong (C_5)^5$.

Teorem berikut menegaskan bahawa $G \cong (C_5)^5$ tidak akan menjadi kumpulan-X_{11} dan kesimpulannya kumpulan-5 yang mempunyai litupan-X_{11} hanyalah $G \cong (C_5)^3$ and $G \cong (C_5)^4$.

Teorem 1. *Andaikan G adalah kumpulan-5. Maka G adalah* kumpulan-X_{11}, *jika dan hanya jika* $G \cong (C_5)^3$ *atau* $G \cong (C_5)^4$.

Pembuktian. Andaikan bahawa *G* adalah kumpulan-5 dan juga kumpulan-X_{11}. Oleh itu, mengandaikan $S = \{1, 2, \ldots, 11\}$ maka $\{M_i \mid i \in S\}$ mewakili litupan-11 persilangan bebas-teras tak berlebihan maksimal bagi *G*, iaitu $G = \bigcup_{i=1}^{11} M_i$ manakala $\bigcap_{i=1}^{11} M_i$ adalah bebas-teras di dalam *G*. Andaikan $D = \bigcap_{i=1}^{11} M_i$ dan dengan Lema 3, $D = \bigcap_{i=1}^{11} M_i = 1$ dan *G* adalah kumpulan-5 abelan permulaan. Dengan Lema 11 dan Lema 12, ini mengukuhkan bahawa $G \cong (C_5)^3$, $G \cong (C_5)^4$ atau $G \cong (C_5)^5$. Bagi kes $(C_5)^3$, perisian GAP akan digunakan untuk mendapatkan litupan-X_{11} bagi $(C_5)^3$. Andaikan bahawa $G \cong A \times B \times C$ dengan $A \cong C_5$, $B \cong C_5$ dan $C \cong C_5$ seperti $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ and $C = \langle c \rangle$. Tanpa mengenepikan perkara umum, andaikan $\langle a \rangle = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\langle b \rangle = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ dan $\langle c \rangle = \{11, 12, 13, 14, 15\}$. Maka, berikut merupakan senarai litupan-X_{11} bagi *G* yang diperoleh daripada GAP,

$$H=\begin{Bmatrix}\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle ab,c\rangle,\langle a^3b,c\rangle,\langle ac,b\rangle,\langle a^3c,b\rangle,\\ \langle a,b^2c\rangle,\langle a,b^3c\rangle,\langle ac,ab\rangle,\langle a^2b,a^2c\rangle\end{Bmatrix}$$

Ini membuktikan bahawa $G\cong(C_5)^3$ adalah suatu kumpulan-X_{11}.

Perhatikan bahawa jika $G\cong(C_5)^4$, maka $G\cong(C_5)^2\times(C_5)^2$. Dengan Lema 7, $(C_5)^2$ mempunyai litupan-X_6. Oleh itu, dari Lema 6, $(C_5)^4$ mempunyai litupan-X_{11}. Maka, bagi suatu litupan-X_{11}, $G\cong(C_5)^4$. Walau bagaimana pun, jika $G\cong(C_5)^3$, maka $G\cong(C_5)^2\times(C_5)^3$. Dari Lema 8 dan Lema 9, $(C_5)^3$ mempunyai litupan-X_n untuk $n\in\{9,10\}$. Dengan Lema 7, $(C_5)^2$ mempunyai litupan-X_6. Oleh itu, dengan Lema 6, $(C_5)^2\times(C_5)^3$ mempunyai sekurang-kurangnya litupan-X_{14}. Oleh yang demikian, bagi suatu litupan-X_{11}, G tidak berisomorpfisma dengan $(C_5)^5$. Ini membuktikan bahawa $G\cong(C_5)^3$ dan $G\cong(C_5)^4$ adalah kumpulan-X_{11} yang mana telah melengkapkan pembuktian teorem ini.

CONCLUSION

Dalam kajian ini, keputusan berkaitan litupan bagi kumpulan-5 telah diperkukuhkan. Kajian ini berjaya mencirikan kumpulan-5 dengan litupan-X_{11}. Ini terbukti bahawa kumpulan-5 yang terlibat di dalam litupan-X_{11} adalah kumpulan-5 abelan permulaan dengan peringkat 5^3 dan 5^4.

ACKNOWLEDGEMENT

Ucapan terima kasih diberikan kepada pengulas kertas kerja atas cadangan penambahbaikan dan komen yang membina.

REFERENCES

Abdollahi, A. (2009). Groups with maximal irredundant covers and minimal blocking sets. arXiv preprint arXiv.0901.1793.

Abdollahi, A., Ataei, J., & Hassanabadi, M. (2005). Groups with a maximal irredundant 6-cover. *Communications in Algebra*, *33*(9), 3225–3238.

Abdollahi, A., Ataei, J., & Hassanabadi, M. (2008). Minimal blocking sets in PG(*n*,2) and covering groups by subgroups. *Communications in Algebra*, *36*(2), 365–380.

Abdollahi, A., & Jafarian, A. S. (2008). On groups with an irredundant 7-cover. *Journal of pure and applied algebra*, *209*(2), 291–300.

Ataei, M. J. (2010). C8-groups and nilpotency condition. *International Journal of Algebra*, *4*(22), 1057–1062.

Ataei, M. J., & Sajjad, V. (2011). Characterization of 5-groups with a maximal irredundant 10-cover. *International Mathematical Forum*, *35*(6), 1733–1738.

Bryce, R. A., Fedri, V., & Serena, L. (1997). Covering groups with subgroups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *55*(3), 469–476.

Greco, D. (1953). Su alcunigruppifinitichesonosomma di cinquesottogruppi. Rend. *Sem. Mat. Univ. Padova*: 22, 313–333.

Hungerford, T. W. (1974). Algebra. New York, NY: Springer.

Newton, B. (2011). On the number of maximal subgroups of a finite solvable group. *Archiv der Mathematik, 96*(6): 501–506.

Tarmizi, R. A., & Sulaiman, H. (2016). Characterization of 7-Groups with a C_{12}-Covering. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, *8*(4), 267-272.

Abd Manaf, F. N., Sarmin, N. H., Mohd Ali, N. M., & Erfanian, A. (2019). On The Exterior Degree of Some Finite *p*-Groups. *Journal of Science and Mathematics Letters, 4(2), 69-74.* Retrieved from *https://ejournal.upsi.edu.my/index.php/JSML/article/view/394*